Eberhard Karls Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Proseminar: Codierungstheorie
Dozentin: Dr. Barbara Baumeister
Referenten: Laura Laib, Nico Henle
Sommersemester 2009

6 Äquivalenz von Codes

Im Folgenden seien $C, C' \leq K^n$ Codes und $M \in (K)$ eine Matrix.

Definition:
Sei M eine Matrix, die vermöge der Abbildung c → c'=cM den Code C bijektiv auf C' abbildet.
M heißt gewichtserhaltend, falls gilt: $wt(c) = wt(cM) = wt(c')$.
Ist M gewichtserhaltend, so muss nicht zwischen C und C' unterschieden werden, denn sämtliche Abstände bleiben unter der Abbildung M erhalten.
Daraus ergibt sich dann folgender Satz:

Äquivalenzsatz von MacWilliams:
Seien C und C' zwei lineare Codes der Dimension $k \in K^n$.
$C \approx C'$ ist genau dann, wenn es einen gewichtserhaltenden K-linearen Isomorphismus $\varphi : C \to C'$ gibt.
Aus diesem Satz folgt nun wt(aM)=wt(a) für alle $a \in K^n$, womit sich folgendes Lemma ergibt:

Lemma:
Sei $M \in K$. Gilt wt(aM)=wt(a) für alle $a \in K^n$, so hat jede Matrix M in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einen Eintrag aus $K \setminus \{0\}$.
Derartige Matrizen nennt man monomial.
Sie bilden eine Gruppe, die sogenannte Monomialgruppe.

Beispiel für eine monomiale Matrix:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ihre Wirkung auf $a = (\ a_1, a_2, a_3, a_4\ )$ ist $aM = (\ 3a_4, a_1, 2a_3, 2a_2\ )$

Definition:
Seien $C, C' \leq K^n$.
Dann heißen C und C' äquivalent, falls es eine monomiale Matrix $M \in K^n$ gibt mit $CM = C'$.